DM n°20

+ 2 exercices d'oraux. Facultatif : IV de l'ex 1. Indications sur la deuxième page.

Exercice 1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On note p le plus petit tel entier, appelé l'indice de nilpotence de u, caractérisé par le fait que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

I. Quelques exemples. Soit $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

b) Déterminer les dimensions de l'image et du noyau de φ.

c) Montrer que φ est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

II. Majoration de l'indice de nilpotence.

On considère un espace E de dimension $n \geqslant 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p.

1) Espace engendré par un vecteur x.

a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq \vec{0}_E$.

b) Soit $F_x = \operatorname{Vect}(x, u(x), \dots u^{p-1}(x))$. Montrer que F_x est stable par u.

c) Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. **Ind** : *Appliquer u^{p-1} à la relation de liaison.*

2) En déduire que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3) Justifier que $\operatorname{rang} u \geqslant p-1$ et que $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant n-p+1$.

III. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice maximal.

On considère à présent un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence maximal $n = \dim E$, et on fixe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq \vec{0}_E$.

On note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.

1) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

a) Justifier l'existence de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$v(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$$

b) Montrer que $v = a_0 \operatorname{Id} + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}$.

3) Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(u)$?

IV. On suppose que $n \geqslant 2$, et toujours que u est nilpotent d'indice n.

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation $v^2 = \lambda \operatorname{Id}_E + u$, d'inconnue $v \in \mathcal{L}(E)$.

1) Condition nécessaire sur λ.

On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ verifie $g^2 = \lambda \operatorname{Id}_E + u$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est stable par g.

b) En déduire que $\lambda \geqslant 0$.

c) Montrer par ailleurs que l'equation $g^2 = u$ n'a pas de solution.

2) Cas $\lambda > 0$.

a) Justifier qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^k).$$

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}$.

b) Demontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k a_{N-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } N \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On definit $g \in \mathcal{L}(E)$ par $g = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}$.

c) Montrer que $g^2 = \operatorname{Id}_E + u$.

d) En déduire l'existence d'une solution g_λ à l'équation $g_\lambda^2 = \lambda \operatorname{Id}_E + u$, pour tout $\lambda > 0$.

Exercice 2. (d'après Centrale PSI) Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui est supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans un l'espace probabilisé (Ω, P), on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

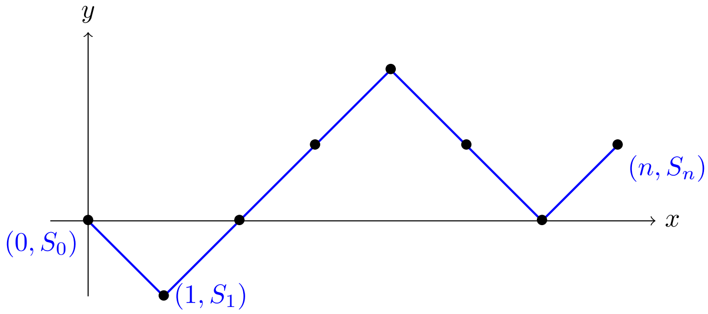
Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.
L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Tous les «chemins» de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbb{P}\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse au moment de la dernière visite en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \max\{0 \leqslant k \leqslant 2n \mid S_k = 0\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur n toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1), \dots, (n, S_n)$.



On note n, x et y des entiers naturels tels que $n \neq 0, x \neq 0$ et $y \neq 0$.

1) On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0,0)$ au point (n, x).

a) Si $\mathcal{C}$ est un tel chemin, quel est le nombre de pas qu'il doit faire vers le haut ?

b) Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \text{ où } a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

c) En déduire $\mathbb{P}(S_n = x)$.

2) <u>Principe de réflexion.</u>
Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y), tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y).

3) **a)** En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k+1)\big).$$

c) En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{n} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

b) En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

Oraux

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6. On cherche quel joueur a le plus de chance de gagner. On note X_n le nombre de 6 obtenu par B lors des $6n$ premiers lancers, et Y le nombre de 6 dans les 6 derniers lancers.

1. Lois de X_n et de Y.
2. Montrer que $P(X_{n+1} \geqslant n+1) = P(X_n \geqslant n+1) + \sum_{r=1}^{6} P(X_n = n+1-r)P(Y \geqslant r)$.
   On admet que $\sum_{r=1}^{6} P(Y \geqslant r) = \sum_{r=1}^{6} kP(Y = k) = E(Y) = 1$.
3. Montrer que $\max\left\{P(X_n = j),\, j \in [\![0, 6n]\!]\right\} = P(X_n = n)$.
4. Conclure.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_2 = \left\{\frac{p}{2^n},\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in [\![0, 2^n]\!]$, $f\left(\frac{p}{2^n}x + (1-\frac{p}{2^n})y\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + (1-\frac{p}{2^n})f(y)$.
   Rmq : Si p est impair, il existe d tel que $\frac{p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2^n} + \frac{d+1}{2^n}\right)$.
3. Montrer que f est convexe.

Mines / Centrale

Exercice 5. Une urne contient des boules numérotées de 0 à n. On en prend une poignée au hasard et on note les numéros obtenus. On effectue deux tirages indépendants. Soit X la variables aléatoire correspondant au nombre de numéros communs entre les deux poignées. Déterminer la loi de X.

Exercice 6.

1. Rappeler un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
2. On dit que $n \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geqslant 2$ tel que k^2 divise n. Montrer que pour tout $i \geqslant 1$, i s'écrit d'une unique maniere sous la forme $i = ma^2$, ou $a \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré.
3. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$.
   Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer que $p_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

X / ENS

Exercice 7. Soient I un intervalle réel contenant 0 et $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $A, C > 0$ telles que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant C|f(x)| + A$. Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant |f(0)|e^{C|x|} + \dfrac{A}{C}\left(e^{C|x|} - 1\right)$.

Exercice 8.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ.
   (b) Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.
2. Soient f, g convexes et continues sur $[0,1]$ vérifiant $\max(f,g) \geqslant 0$.
   Montrer qu'il existe α, β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f + \beta g \geqslant 0$.
3. Soient $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1, \ldots, f_n) \geqslant 0$.
   Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \geqslant 0$.

Exercice 9. Une grille $\{1,2,3\} \times \{1,2,...,n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2,n)$. à chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2,k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se deplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t.

Exercice 10. Soient $n \geqslant 1$ et E une partie de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.

1. On suppose que E est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{\mathbb{1}_A,\, A \in E\}$ comme partie de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$.
   (a) Pour $A \in E$, on considère l'application $\tilde{A}\colon B \mapsto \overline{|A \cap B|}$, où $\overline{|A \cap B|} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la parité du cardinal de $|A \cap B|$. Justifier que $\tilde{A}$ peut être vu comme un élément du dual de $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$.
   (b) Montrer que $|E| \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 11. ♣ **Nombres algébriques**. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est algébrique si λ est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ (par ex, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), on pose $\mathbb{K}[\lambda] = \{P(\lambda),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$, la $\mathbb{K}$-algèbre engendrée par λ.

On pourra admettre le théorème de Bézout polynomial : si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux (ils n'ont pas de diviseurs communs de degré $\geqslant 1$), il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.

I. Irréductibilité du polynôme minimal d'un nombre algébrique.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ algébrique non nul.

1) Vérifier que l'ensemble $I_\lambda = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(\lambda) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et un idéal, c'est-à-dire $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall Q \in I_\lambda$, $PQ \in I_\lambda$.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P \mid Q$.

Le polynôme P est appelé polynôme minimal de λ, I_λ est l'ensemble des multiples de P. On pose $\deg \lambda = \deg P$.

3) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[\lambda]$ comme $\mathbb{K}$-ev ?

4) Montrer que $\mathbb{K}[\lambda]$ est un corps.

5) Soit $\mu \in \mathbb{K}[\lambda]$. Montrer que μ est algébrique et que $\deg \mu \leqslant \deg \lambda$.

6) Montrer que λ^{-1} est algébrique et que $\deg \lambda^{-1} = \deg \lambda$. Préciser son polynôme minimal Q.

II. Lemme télescopique et corps des nombres algébriques.

1) Soient $K \subset J \subset I$ trois corps. On suppose que $\dim_K J = n$ et $\dim_J I = m$.
Montrer que I est un K-ev de dimension finie et que $\dim_K I = nm$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[\lambda]$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension finie.
Montrer que si α, β sont algébriques alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques, de degrés $\leqslant \deg \lambda \deg \mu$.

Indications DM20

Indications Exercice 1.

II. 1) c) On pourra appliquer certaines puissances de u à une relation de liaison.

IV. 1) b) On a $\dim \operatorname{Ker} u = 1$

Indications Exercice 2.

1) a) Si m est le nombre de pas vers le haut, il y a $n - m$ pas vers le bas, donc $m - (n - m) = \dots$.

b) Commencer par justifier la deuxième partie. Pour la première, que représente $\frac{n+x}{2}$ pour le chemin ?

3) a) Que représente $N_{n-1,x-1}$ vis-à-vis de l'énoncé ?

Indication Oraux

Indications Exercice 3.

3. Pour déterminer $\max u_k$, étudier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$.

4. La probabilité que B gagne est $P(X_{n+1} \geqslant n + 1)$, la probabilité que A gagne est $P(X_n \geqslant n)$.

Indications Exercice 4.

2. Si p est pair, le résultat relève directement de l'hypothèse de récurrence. Si p est impair, on peut écrire $\frac{p}{2^{n+1}}$ comme une moyenne de deux termes de la forme $\frac{q}{2^n}$ consécutifs (faire le dessin).

3. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $d \in \mathcal{D}_2 \cap [0, 1]$, $f(dx + (1 - d)y) \leqslant df(x) + (1 - d)f(y)$.

Indications Exercice 5. C'est du dénombrement.

Indications Exercice 8.

2. Faire un dessin. Un point particulier apparaît. Considérer les deux tangentes en ce point.

Indications Exercice 9. Cela revient en fait à considérer un tuyau d'une seule ligne, avec, à chaque étape, une probabilité $\frac{1}{2}$ de descendre, et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester au même niveau.

Indications Exercice 11.

I. 2) Considérer un polynôme non nul de I_λ de degré minimal (justifier l'existence).

4) Pour l'existence de l'inverse de $a \in \mathbb{K}[\lambda]$, considérer une application linéaire en dimension finie associée à a.

5) L'existence d'un polynôme annulateur est équivalent à l'existence d'une relation de liaison sur les puissances de μ.

6) Il s'agit d'expliciter un polynôme annulateur de λ^{-1}.